2017-2018 ÖĞRETİM YILI ANALİZ 4 DERSİ BÜTÜNLEME SINAVI

1- $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonunu dikkate alalım. $\mathbb{R}^2$ üzerinde $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

kısmi türevlerinin varlığını araştırınız.

Çözüm: $(x,y)\neq(0,0)$ ise $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right)=2\dfrac{y(x^2+y^2)-xy2x}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{2y^3-2yx^2}{(x^2+y^2)^2}$ ve

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)=2\frac{x(x^2+y^2)-xy2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x^3-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$(x,y)=(0,0)$ ise

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2h(0)}{h^2+(0)^2}-0}{h}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,\mathrm{k})-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{2(0)k}{(0)^2+k}-0}{k}=0.$$

2- Eğer $w=x+2y+z^2,\ x=\dfrac{r}{s},\ y=r^2+\ln s$ ve $z=2r$ ise $\dfrac{\partial w}{\partial r},\ \dfrac{\partial w}{\partial s}$ kısmi türevlerini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}=1.\frac{1}{s}+2.2r+2z.2=\frac{1}{s}+4r+8r,$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}=1.\left(-\frac{r}{s^2}\right)+2.\frac{1}{s}+2z.0=-\frac{r}{s^2}+\frac{2}{s}.$$

3- $(0,0,0)$ noktasında $z=x\cos y-ye^x$ yüzeyine teğet olan düzlemi bulunuz.

Çözüm. $z=f(x,y)=x\cos y-ye^x$ ve $f(0,0)=0.\cos 0-0.e^0=0$.

$$f_x(x,y)=\cos y-ye^x,\ f_y(x,y)=-x\sin y-e^x,\quad f_x(0,0)=1,\ f_y(0,0)=-1.$$

teğet düzleminin denklemi: $z=L(x,y)=f(0,0)+f_x(0,0)(x-0)+f_y(0,0)(y-0)=x-y$.

4- $f(x,\mathrm{y})=xy-x^2-y^2-2x-2y+4$ fonksiyonunun yerel ekstremum değerlerini bulunuz.

Çözüm. $f_x(x,y)=y-2x-2=0,\ f_y(x,y)=x-2y-2=0; \quad x=y=-2.$

$(-2,-2)$ noktası f ninekstremum değer alabileceği tek nokta.

$f_{xx}.f_{yy}-f_{xy}{}^2=(-2).(-2)-(1)^2=3.$

$f_{xx}<0, \quad f_{xx}.f_{yy}-f_{xy}{}^2>0$ olduğundan $(-2,-2)$ noktası f nin yerel maksimum noktası.

5- $2x+y-z-5=0$ düzleminde orjine en yakın olan $P(x,y,z)$ noktasını bulunuz.

Çözüm. Orjine uzaklık: $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ yerine $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ fonksiyonunun $g(x,y,z)=2x+y-z-5=0$ yan koşulu üzerinden en küçük yapmayı istiyoruz.

$h(x,y)=f(x,y,2x+y-5)=x^2+y^2+(2x+y-5)^2$ fonksiyonunun minimum değerini bulmak yeterlidir.

$h_x=2x+2(2x+y-5)(2)=0,\ h_y=2y+2(2x+y-5)=0.$

$10x+4y=20, \quad 4x+4y=10$.

$x=5/3, \quad y=5/6.$

$z=2(5/3)+5/6-5=-5/6$.

Orjine en yakın nokta: $P(5/3,5/6,-5/6)$.

6- $(x_k)\subset\mathbb{R}^n$ ve $(\alpha_k)\subset\mathbb{R}$ birer dizi $x\in\mathbb{R}^n$ ve $\alpha\in\mathbb{R}$ olsun. Eğer $x_k\to x$ ve $\alpha_k\to\alpha$ ise $\alpha_k x_k\to\alpha x$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

$x_k\to x,\ \alpha_k\to\alpha \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N} \ni \forall k>n_\varepsilon, \|x_k-x\|<\varepsilon/2M \wedge |\alpha_k-\alpha|<\varepsilon/2(\|x\|+1).$

$\|\alpha_k x_k-\alpha x\|\le\|\alpha_k x_k-\alpha_k x\|+\|\alpha_k x-\alpha x\|=|\alpha_k|\|x_k-x\|+|\alpha_k-\alpha|\|x\|<M(\varepsilon/2M)+(\varepsilon/2(\|x\|+1))\|x\|$

$=(\varepsilon/2)+(\varepsilon/2)=\varepsilon$

7- (a) $\left\{\left(-2,-\dfrac{1}{n}\right):\ n\in\mathbb{N}\right\}$ ailesinin $(-1,0)$ aralığının bir açık örtüsü olduğunu gösteriniz.

(b) Bu açık örtünün sonlu bir alt örtüsünün bulunmadığını ispatlayınız.

Çözüm.

$$x \in (-1,0) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ni -1 < x < -1/n < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in (-2,-1/n) \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(-2,-1/n)$$
$$\Rightarrow (-1,0) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(-2,-1/n).$$

(b) $\zeta = \{(-2,-1/n_k) | k = 1,...,m\} \subset \{(-2,-1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ alt ailesinin $(-1,0)$ için bir sonlu alt örtü olduğunu varsayalım. Eğer $-1/n_0 = maks\{-1/n_k | k = 1,...m\}$ alınırsa

$$(-1,0) \not\subset \bigcup_{k=1}^{m}(-2,-1/n_k).$$

8- $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu A üzerinde sürekli ise, o zaman her $F \subset \mathbb{R}^n$ kapalı kümesi için $f^{-1}(F)$ kümesinin de A da kapalı olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $x \in \left(f^{-1}(F)\right)'$ (x yığılma noktası) olsun.

$\exists (x_k) \subset f^{-1}(F) \ni x_k \to x \Rightarrow f(x_k) \to f(x)$ (f sürekli olduğundan) $\Rightarrow f(x) \in F' \subset F$ (F kapalı olduğundan) $\Rightarrow x \in f^{-1}(F) \Rightarrow \left(f^{-1}(F)\right)' \subset f^{-1}(F)$.

9- $R, y = 2x^2$ ve $y = 1 + x^2$ parabolleri arasında kalan bölge olmak üzere $\iint_R (x+2y)\,dA$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $2x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

$$\iint_R (x+2y)dA = \int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{1+x^2}(x+2y)\,dydx = \int_{-1}^{1}\left\{\left[xy+y^2\right]_{y=2x^2}^{y=1+x^2}\right\}dx = \int_{-1}^{1}\left\{\left[x\left(1+x^2\right)+\left(1+x^2\right)^2 - x.2x^2 - \left(2x^2\right)^2\right]\right\}dx$$
$$= \int_{-1}^{1}\left(1+x+2x^2-x^3-2x^4\right)dx = \left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{2x^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{1}{3}.$$

10- $\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^{1} e^{y^3}\,dydx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^{1} e^{y^3}dydx = \int_0^1 \int_0^{3y^2} e^{y^3}dxdy = \int_0^1 \left[xe^{y^3}\right]_{x=0}^{x=3y^2} dy = \int_0^1 \left[3y^2e^{y^3}\right]dy = \int_0^1 e^t dt = e-1.$

11- $f(x,y) = e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında ikinci dereceden Taylor polinomunu yazınız.

Çözüm.

$$f(x,y)=e^{-\left(x^2+y^2\right)} \Rightarrow f_x(x,y)=-2x.e^{-\left(x^2+y^2\right)} \wedge f_y(x,y)=-2y.e^{-\left(x^2+y^2\right)} \wedge f_{xx}(x,y)=-2\left(e^{-\left(x^2+y^2\right)}-2x^2.e^{-\left(x^2+y^2\right)}\right)$$

$$\wedge f_{xy}(x,y)=4xy.e^{-\left(x^2+y^2\right)} \wedge f_{yy}(x,y)=-2\left(e^{-\left(x^2+y^2\right)}-2y^2.e^{-\left(x^2+y^2\right)}\right).$$

$$f_x(0,0)=0,\ f_y(0,0)=0,\ f_{xx}(0,0)=-2,\ f_{xy}(0,0)=0,\ f_{yy}(0,0)=-2.$$

$$\mathrm{T}_2(x,y)=f(0,0)+f_x(0,0).x+f_y(0,0).y+\frac{1}{2}\left[f_{xx}(0,0).x^2+2f_{xy}(0,0).xy+f_{yy}(0,0).y^2\right]$$

$$=1+0.x+0.y+\frac{1}{2}\left[-2x^2+2.0.xy-2y^2\right]=1-x^2-y^2.$$